
L'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré

BERNARD R. HODGSON

Département de mathématiques et de statistique

Université Laval

Bernard.Hodgson@mat.ulaval.ca

1 Introduction

Bien que l'irrationalité de $\sqrt{2}$ soit un fait mathématique connu des Grecs de l'Antiquité, ce n'est pas en ces termes que ceux-ci s'exprimaient à cet égard — l'idée moderne de « nombre réel irrationnel » ne faisait pas partie, pourrait-on dire, de leur cadre conceptuel, ni de leur vocabulaire. S'intéressant plutôt au fait que des segments de droite donnés puissent être ou non *commensurables*¹ — c'est-à-dire commensurables entre eux, l'un par rapport à l'autre —, ils ont établi l'*incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré* : étant donné un carré de côté c et de diagonale d , il n'y a pas de « commune mesure » à ces deux segments.

1. Du latin *commensurabilis*, de *cum*, « avec » et *mensura*, « mesure ». Deux grandeurs commensurables sont donc des grandeurs de même genre qui ont une « commune mesure » : il existe alors une grandeur étalon permettant de les « mesurer » toutes deux, c'est-à-dire de les exprimer par des nombres entiers en tant que multiples de cet étalon. Le mot *incommensurable* s'applique à des grandeurs qui ne peuvent se comparer en raison de l'absence d'une mesure commune. Par extension, le mot incommensurable en est venu à désigner dans le langage courant ce qui est très grand, trop grand pour être mesuré, donc démesuré — ce qui est bien sûr un faux sens, mathématiquement parlant.

La dichotomie *commensurable/incommensurable* est introduite par Euclide à la définition X.1 des *Éléments* : *Sont dites grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure, et incommensurables, celles dont aucune commune mesure ne peut être produite.*

Autrement dit, il n'existe pas de « segment étalon » e commun² à ces deux segments et compris un nombre exact (entier !) de fois autant dans d que dans c — un tel étalon e , s'il existait, serait donc tel que $d = m \times e$ et $c = n \times e$ pour certains naturels m et n .³

Les preuves que l'on présente quant au statut de $\sqrt{2}$ consistent habituellement à montrer que ce nombre ne peut pas être un rationnel — car si on avait au contraire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec a et b dans $\mathbb{N}$ et $b \neq 0$, alors telle ou telle contradiction s'ensuivrait. Il est cependant possible de démontrer que la diagonale et le côté du carré sont incommensurables en se plaçant dans un cadre géométrique, et c'est ce que propose le raisonnement qui suit. À noter que cette preuve ne se retrouve pas telle quelle dans les textes anciens. Elle est cependant présentée dans un manuel de mathématiques du 19^e siècle — le célèbre *Algebra : An elementary text-book for the higher classes of secondary schools and for colleges* (1886), du mathématicien écossais George Chrystal (1851–1911) — et est tout à fait dans l'esprit des Grecs de l'Antiquité.⁴ On y utilise une méthode de raisonnement essentiellement équivalente à celle de la proposition 2 du Livre X des *Éléments* d'Euclide.⁵

2 Une construction géométrique préliminaire

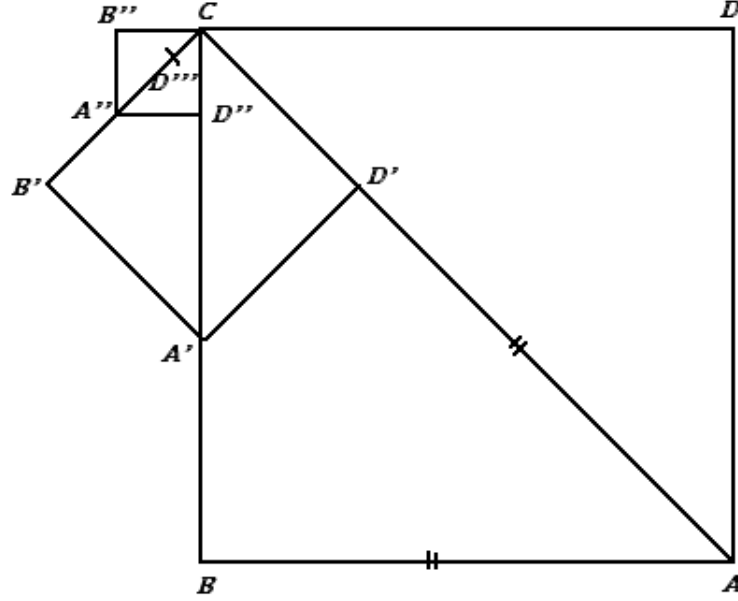
Soit un carré $ABCD$ de côté $c = AB$ et de diagonale $d = AC$. Déterminons sur AC un point D' tel que $AD' \cong AB$ et traçons $A'D'$ perpendiculaire à la diagonale AC , avec A' sur le côté BC .

2. On aurait volontiers parlé, dans un langage d'il y a quelques siècles, de *partie aliquote* commune. Le mot *aliquote* est tiré du latin médiéval *aliquotus*, de *alius*, « autre » et *quotus*, « en quel nombre » (cf. notre mot *quote-part*). Une partie aliquote d'un tout y est contenue un nombre exact de fois. Son antonyme est *partie aliquante*, qui n'est pas contenue un nombre exact de fois dans le tout en question — latin médiéval *aliquantus*, de *quantus*, « combien grand ». Les expressions *aliquote* et *aliquante* sont aujourd'hui tombées en désuétude.

3. Traduite dans le langage de l'arithmétique des nombres naturels, la notion de *mesure commune* à deux segments (de longueur entière) revient donc à celle de *diviseur commun* de deux naturels.

4. Cette preuve de Chrystal, avec référence à ce dernier, est mentionnée par Thomas L. Heath dans son ouvrage monumental *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (volume 3, Dover, 1956, p. 19). Il en est aussi question dans l'ouvrage de vulgarisation mathématique bien connu *The Enjoyment of Mathematics : Selections from Mathematics for the Amateur* de Hans Rademacher et Otto Toeplitz (Princeton University Press, 1957, p. 24) — traduction française : *Plaisir des mathématiques* (Dunod, 1967, p. 21).

5. La proposition X.2 se lit comme suit : *Si, de deux grandeurs inégales proposées la plus petite étant retranchée de la plus grande de façon réitérée et en alternance, le dernier reste ne mesure jamais le reste précédent, les grandeurs seront incommensurables.* (Texte tiré de Bernard Vitrac, *Euclide d'Alexandrie : Les Éléments* (volume 3, Presses Universitaires de France, 1998, p. 94).



Observons que le triangle $A'CD'$ est non seulement rectangle, mais aussi isocèle (car l'angle $A'CD'$ vaut la moitié d'un angle droit). Nous sommes donc en présence d'un demi-carré.

Soit maintenant B' tel que $A'B'CD'$ soit un carré et reprenons le processus précédent sur cette nouvelle figure. On a donc D'' sur $A'C$ tel que $A'D'' \cong A'B'$. Traçant alors $A''D''$ perpendiculaire à $A'C$, avec A'' sur $B'C$, il en résulte un nouveau carré $A''B''CD''$.

Cette construction peut être répétée indéfiniment, donnant à chaque fois, sur la diagonale de chacun des carrés successifs, une longueur pouvant être utilisée comme côté du carré suivant. Lors de ce processus, les côtés de ces carrés deviennent de plus en plus petits,⁶ mais sans jamais devenir nuls :

$$CD > CD' > CD'' > CD''' > \dots$$

Par construction, ces longueurs sont la différence entre la diagonale et le côté d'un carré donné. Ainsi,

6. Ce fait, passablement évident sur le plan intuitif, pourrait se justifier comme suit. Observons en premier lieu que dans tout carré, la diagonale est inférieure au double du côté, c'est-à-dire, s'agissant du carré $ABCD$, $AC < 2 \times CD$ — on pourrait ici faire appel à l'inégalité triangulaire appliquée au triangle ACD , ou encore au fait que $AC = \sqrt{2} \times CD < 2 \times CD$. Or $AC = CD + CD'$, de sorte que $CD' < CD$. On raisonnerait de même pour les côtés CD'' , CD''' , etc.

$$\begin{aligned}
CD' &= AC - AB &= d - c \\
CD'' &= A'C - A'B' \\
CD''' &= A''C - A''B'' \\
&\vdots
\end{aligned}$$

3 Preuve de l'incommensurabilité

Supposons maintenant, pour fins de contradiction, que la diagonale et le côté du carré initial $ABCD$ sont commensurables. On a donc un segment étalon commun e tel que $AC = d = m \times e$ et $CD = AB = c = n \times e$, pour $m, n \in \mathbb{N}$ (et avec, bien sûr, $m > n$). Il s'ensuit donc que

$$CD' = d - c = (m - n) \times e,$$

de sorte que le côté du carré $A'B'CD'$ est lui aussi un multiple de e .

Nous allons maintenant vérifier que la diagonale de ce même carré peut elle aussi s'exprimer comme un multiple de e . À cette fin, montrons tout d'abord que $A'B \cong A'D'$. En effet, comme le triangle BAD' est par construction isocèle, il s'ensuit que deux des angles du triangle $BA'D'$ sont congruents — ces angles étant les compléments de deux angles eux-mêmes congruents — et donc que ce dernier triangle est lui aussi isocèle, avec $A'B \cong A'D'$.⁷ Or le triangle $A'CD'$ étant également isocèle (voir ci-haut), on en tire enfin que $A'B \cong CD'$.

La diagonale $A'C$ du carré $A'B'CD'$ vaut donc

$$\begin{aligned}
A'C &= BC - A'B \\
&= AB - CD' \\
&= n \times e - (m - n) \times e \\
&= (2n - m) \times e,
\end{aligned}$$

aussi un multiple de e (on a déjà vu que $2n > m$ — voir la note infrapaginale n° 6).

Posant, par commodité, $m' = 2n - m$ et $n' = m - n$, on en tire alors que la diagonale $A'C$ et le côté CD' du nouveau carré sont respectivement de la forme $A'C = m' \times e$ et $CD' = n' \times e$, où m' et n' sont des naturels non nuls. Et bien sûr le nouveau carré $A'B'CD'$ est plus petit que le carré initial $ABCD$.⁸

7. La congruence $A'B \cong A'D'$ peut être également justifiée en observant que les triangles ABA' et $AD'A'$ sont congruents — cas de congruence *catète-hypoténuse* de triangles rectangles.

8. Ce fait, lui aussi évident sur le plan intuitif, peut se justifier comme suit. Notons d'une part que puisque $2n > m$, on obtient, en soustrayant n de chaque côté de cette inégalité, que $n > n'$. Par ailleurs, comme $m > n$, on a donc $2m > 2n$, et il reste à soustraire m de chaque côté de cette dernière inégalité pour vérifier que $m > m'$.

Nous sommes ainsi passés du carré $ABCD$ (dont on a supposé la diagonale et le côté commensurables) au carré $A'B'CD'$ lui aussi de diagonale et de côté commensurables, les segments $A'C$ et CD' étant des multiples du même segment étalon e servant à engendrer AC et CD . Il va de soi que cette observation vaudrait aussi pour tous les carrés successifs, de plus en plus petits, qu'introduit la construction géométrique précédente.

Nous proposons maintenant deux façons de conclure l'argument.

Variante 1 : Nous sommes ainsi en présence d'une famille infinie de carrés de plus en plus petits, dont les côtés et diagonales sont tous des multiples d'un même segment étalon e (de longueur finie et déterminée), ce qui est absurde. On en conclut que la diagonale et le côté du carré initial sont incommensurables.

Variante 2 : Nous reprenons le raisonnement en mettant cette fois en évidence une suite décroissante de nombres naturels.

Le passage du carré initial $ABCD$ au carré $A'B'CD'$ montre donc que nous sommes en présence d'une famille de carrés de plus en plus petits et de côtés respectifs

$$CD > CD' > CD'' > CD''' > \dots ,$$

chacun de ces côtés étant un multiple d'un même segment e :

$$n \times e > n' \times e > n'' \times e > n''' \times e > \dots .$$

On en extrait la suite

$$n > n' > n'' > n''' > \dots ,$$

qui serait donc une suite infinie strictement décroissante de naturels, ce qui est absurde.⁹

4 En guise de conclusion

L'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré était un fait fort bien connu des Grecs de l'Antiquité. Mais la démonstration qui précède n'est vraisemblablement pas celle qui leur était familière. Ainsi, Aristote écrit dans l'*Organon* (*Premiers Analytiques*, I.23) :

9. Cet argument repose sur le même principe que la méthode dite de *descente infinie*, rendue célèbre par Pierre de Fermat (1601–1665) et qu'il a décrite dans une lettre datant d'août 1659 à Pierre de Carcavi (1600–1684). On y utilise le fait que l'ordre sur l'ensemble des naturels satisfait à la propriété aujourd'hui connue sous le nom de « bon ordre » : tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. Il n'est donc pas possible qu'une suite infinie de naturels soit strictement décroissante. C'est sur cette même idée de descente infinie que s'appuie l'argument de la proposition VII.31 des *Éléments* d'Euclide : tout nombre composé est divisible par un certain nombre premier.

« Par exemple, on établit que la diagonale est incommensurable parce qu'une fois qu'on a supposé qu'elle est commensurable, un nombre impair se trouve égal à un nombre pair. »¹⁰

Ce commentaire d'Aristote renvoie certes à une tout autre sorte d'argumentation que celle à la Chrystal que nous venons de donner.

Il est à noter que le fait que la diagonale et le côté du carré sont incommensurables semble être si connu à l'époque d'Aristote que celui-ci se permet même, dans le passage qui précède, de simplement rappeler ce résultat, s'en servant comme un exemple-type, à ses yeux, d'un argument par réduction à l'absurde. Mais à quoi au juste renvoie l'expression « un nombre impair se trouve égal à un nombre pair » dont se sert le Stagirite ? À vrai dire, on ne le sait pas précisément, mais voici deux explications possibles.

- Dans la « preuve classique » de ce résultat — que nous ne faisons qu'esquisser ici —, peut-être connue des Pythagoriciens, on suppose que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$. On peut admettre de plus, sans perte de généralité, que $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible — autrement dit que $\text{PGCD}(a, b) = 1$. Comme $a^2 = 2b^2$, on a que a^2 est pair, de même que a , de sorte que b est impair, puisque $\text{PGCD}(a, b) = 1$. Mais a étant pair, il est de la forme $a = 2c$, d'où il suit que $2b^2 = a^2 = 4c^2$, c'est-à-dire $b^2 = 2c^2$ et donc b pair. Mais alors b est à la fois pair et impair : contradiction !
- Une variante de cette preuve, qui repose aussi sur la notion de parité, fait intervenir une analyse différente de l'égalité $a^2 = 2b^2$ — il n'est pas nécessaire cette fois de supposer que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible. S'intéressant aux factorisations premières de a et de b , et supposant qu'elles font intervenir respectivement x et y facteurs premiers (en répétant autant de fois que nécessaire, dans chaque cas, les nombres premiers en jeu), on en conclut que
 - la factorisation première de a^2 contient $2x$ facteurs premiers,
 - la factorisation première de b^2 contient $2y$ facteurs premiers,
 - la factorisation première de $2b^2$ contient $2y + 1$ facteurs premiers.

Le nombre $a^2 (= 2b^2)$ possède donc à la fois un nombre pair ($2x$) et impair ($2y + 1$) de facteurs premiers, en contradiction avec le fait que la factorisation première d'un entier naturel est unique.¹¹

10. Texte tiré de Michel Crubellier, *Aristote : Premiers Analytiques* (Flammarion, 2014, p. 117). On peut peut-être penser ici, en lien avec la démonstration classique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ — voir la 1^{re} puce qui suit —, au fait que le dénominateur d'une fraction serait à la fois pair et impair.

11. Ce dernier argument pourrait aussi s'exprimer en examinant les exposants du nombre premier 2 dans la factorisation première de a^2 et dans celle de $2b^2$: cet exposant (unique !) est pair dans le premier cas et impair dans l'autre, ce qui est absurde.